

非静水圧を考慮した水路床非均一性による 水面形に関する研究

(株)建設技術研究所 大阪本社 河川部 洪 尔超

1. 研究背景

底面形状が曲率を有する場合、非静水圧が流速分布に影響を与え、静水圧を仮定した基礎方程式では水面形を再現できない。本研究では、ピカールの逐次漸近法を用いた非静水圧を考慮した水面形方程式を提案し、鉛直二次元の実験結果との比較により、その提案式の妥当性を検証した。

2. ピカールの逐次近似法による流れ関数

ピカールの逐次近似法は極限としての初期値問題の解を逐次近似して求めている方法である。まず、初期値として水平速度は(1)式のように仮定している。

$$u_0(x, y) = \frac{q}{\eta(x) - z(x)} \quad (1)$$

ここに、 $\eta(x)$ は底面から水面までの高さで、 $z(x)$ は非均一性水路床高さを表している。 q は単位幅流量である。また、ポテンシャル流において、水平速度 u と鉛直速度 v は(2)、(3)式を満足している。

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (2)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3)$$

$$\psi_n(x, y) = \int u_{n-1}(x, y) dy + y_{n-1}(x, y) \quad (4)$$

ここに、 ϕ は速度ポテンシャルであり、 ψ は流れ関数である。境界条件として、水面の流線あるいは $y=\eta(x)$ の時、流れ関数 $\psi(x, y)=Q$ で、 $y=z(x)$ の時、流れ関数 $\psi(x, y)=0$ とする。

そして、初期値 u_0 を(4)式に代入して、境界条件を用いて、流れ関数を求めることができる。ピカールの逐次近似法により、 $n=1, 2, 3, \dots$ と大きくすると、流れ関数の次数が一次精度、二次精度と大きくなる。その上、導出した流れ場は、 n が同じ階で非圧縮性流れの連続式に適用でき、 n が大きければ、大きいほど、非回転性流れを満足する。具体的な逐次近似法のフローを図-1に示す。

図-1の中の繰り返し計算の一つ流れAを見ると、 $v(x, y)$ の計算部分と $u(x, y)$ の計算部分はそれぞれポテンシャルより与えられる関数(2)式から得る式である。すなわち、ピカールの逐次近似法はポテンシャルを解いている。

3. 水面形方程式の導出

非静水圧を考慮したベルヌーイの定理を(5)式に示す。

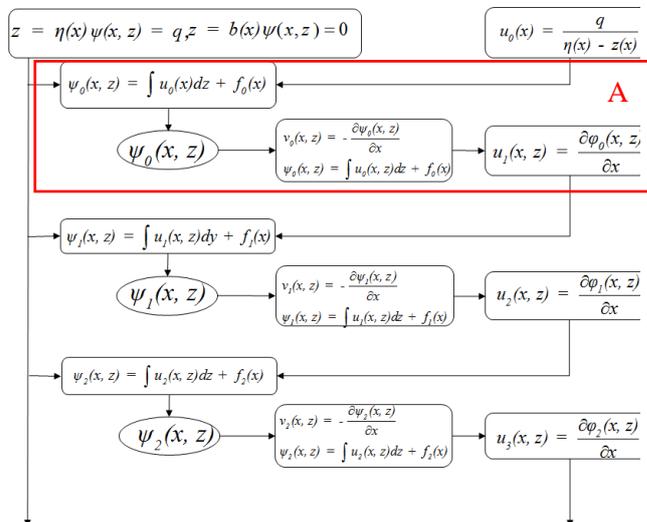


図-1 ピカールの逐次近似法流れ図

$$R = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + gz + \frac{P}{\rho} \quad (5)$$

ここで、圧力 P は静水圧を仮定せず、直接圧力としている。ピカールの逐次近似法により速度分布を(5)式に代入して、二乗までの項までの式にすることで、非静水圧の水面形方程式(6)を導出する。

$$(1 - R)h^2(x) + h(x)[z(x) + 2kh''(x) + 3kz'(x)] - kh'(x)^2 + 2kz'(x)^2 + 3k^2 = 0 \quad (6)$$

ここに、 k は既知量 $Q^2/6g$ である。上流端の $R=1/2u_0^2+gh_0$ を(6)式に代入すると、 $h(x)$ に関する(7)式を得る。

$$h''(x) = \frac{1}{2h_0^2 q^2 h(x)} (6gh_0^3 - 6gh_0^2 h(x)^2 z(x) - 6gh_0^2 h(x)^3 + h_0^2 Q^2 h'(x)^2 - 3h_0^2 Q^2 h(x)z'(x) + 3Q^2 h(x)^2 - 3h_0^2 Q^2 z'(x)^2 - 3h_0^2 Q^2) \quad (7)$$

(7)式は4次Runge-Kutta法を用いて解くことができる。また、ピカールの逐次近似法により速度分布を用いることで、圧力 P も計算できる。

4. 実験の検証と比較

提案式の妥当性検証のため、開水路実験を行う。実験条件は表-1に示す5caseとする。図-2に実験水路を示す。

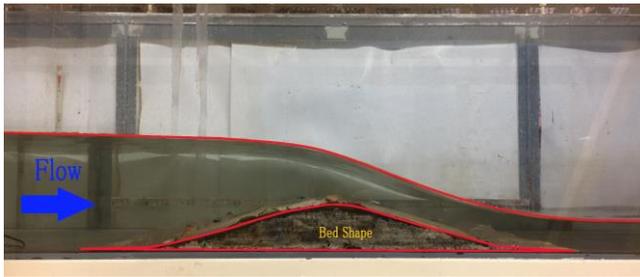


図-2 実験水路

表-1 実験条件

Case	流量 [L/min]	F_r	勾配: i	凸部の高さ z_{mx} [cm]	粗度係数 $[s/m^{1/3}]$
1	1030	0.152	1/400	5	0.023
2	1450	0.180	1/400	5	0.023
3	1715	0.195	1/400	5	0.023
4	1450	0.196	1/400	3	0.023
5	1450	0.246	1/400	2	0.023

4.1 水深の検証

図-3に実験水深と計算水深の比較を示す。case1からcase3は同じ底面形状($z=5\text{Exp}[-x^2/256]$ cm)で、異なる流量による比較結果である。流量規模を変化させても、計算結果は実験結果を良好に再現している。

case2, case4, case5は同じ上流端流量条件で、底面凸部の高さが5cm, 3cm, 2cmと異なる比較結果である。底面形状を変化させても、計算結果は実験結果を良好に再現している。

4.2 底面水圧

N.S.Sivakumaranらの実験¹⁾による開水路(底面形状:凸部の高さ20 cm, 流量4032 L/min)で計測された圧力の結果と本研究で提案する(7)式の数値解による底面の圧力の比較を行う(図-4)。計算結果は実験結果を良好に再現している。

一方、静水圧を仮定した底面の圧力は実験結果を再現できていない。このことから、非均一な開水路床において、水圧は静水圧と仮定できず、非静水圧を考慮しなければならないことが分かる。

5. まとめ

本研究において、非均一な開水路床における非静水圧を考慮した水面形方程式を提案した。また開水路実験を行い、提案した式の妥当性を検証した。

1)ピカール逐次漸近法による水面形方程式によって非均一な開水路床におけるポテンシャルフローの流れ場を計算することができた。

2) 提案した水面形方程式は、実験より得た常流から射流への遷移部を良好に再現できた。

今後の課題として、実務へ適用に向けて、河床形状の急変部や横断構造物周辺で発生する跳水現象を対象とした検討のため、エネルギー損失項を考慮した基礎計算式の改良が必要である。

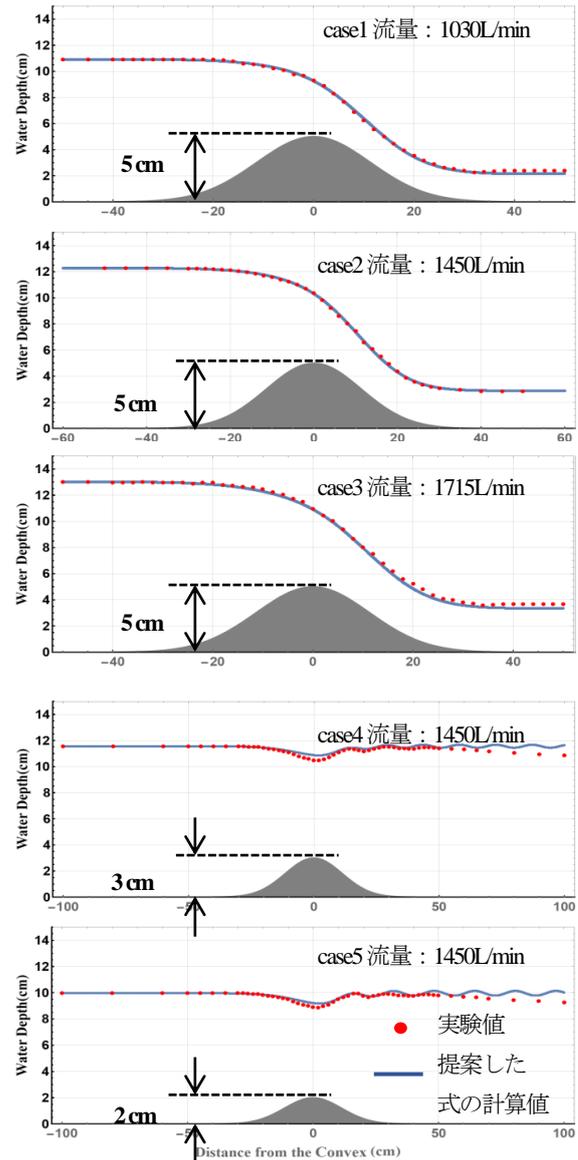


図-3 実験水深と計算水深の比較

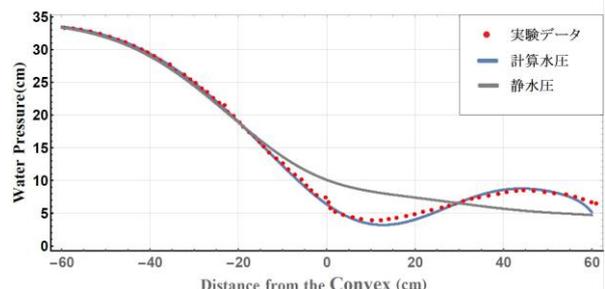


図-4 底面圧力の実験値と計算値の比較

参考文献

- 1) N.S.SIVAKUMARAN, T.TINGSANCHALI AND R.J.HOSKING: Steady shallow flow over curved beds, J. Fluid Mech. (1983), Vol.128p. p. 469-487
- 2) 銭潮潮, 山田正: 2014, 開水路断面の不均一性に起因する不等流の水面形形成に関する基礎的研究, 水利科学, No.336.第58巻.第1号